## 1142. 混合型保測変換ノ二,三ノ性質ニツイテ

河田敬義（東京文理大）

### §1.

$(\Omega, \mathcal{B}, m)$ ($m(\Omega)=1$) ヲ測度空間トシ, $\Omega \ni \omega \to T\omega \in \Omega$ ヲソノ保測変換トスル。$T$ ガエルゴード的 (*ergodisch*) トハ $\mathcal{B} \ni E$, $m(E \ominus TE) = 0$ ナラバ $m(E) = 0$ 又ハ $=1$ ナルコトヲイフ。$T$ ガ混合型 (*Mischungstypus*) デアルトハ $\mathcal{B} \ni A, B$ ニ對シテ

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} m(T^n A \cap B) = m(A)\cdot m(B)$$

ガ成立スルコトヲイフ。又 (1) ガアル $\{n\}$ ノ密度1ノ部分列 $\{n'\}$ ヲトレバ $\lim_{n'\to\infty}$ ニ對シテ成立スルトキニ $T$ ヲ廣義混合型トイフ。コレハ $T$ ガエルゴード的デ且ツ固有函數 $\phi$:

$$(2) \quad \phi(T\omega) = e^{i\lambda_0}\phi(\omega) \quad f.\ ii \quad (\lambda_0 \neq 0 \ (2\pi))$$

ガ存在シナイコトト同値デアルコトガ良ク知ラレテ居ル。

G. D. Birkhoff ノ個別エルゴード定理ニヨレバ, $T$ ガエルゴード的デアルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ, 任意ノ $\Omega$ 上 $m$-可積分ナ函數 $f(\omega)$: $f(\omega) \in L^1(\Omega)$ ニ對シテ殆ンドスベテノ $\omega$ ニ對シテ

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)=\int_{\Omega} f(\omega)\,m(d\omega)$$

トナルコトデアル。(3)ノ代リニスベテノ $E\in B$ ニ對シテ殆ンドスベテノ $\omega$ ニ對シテ

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(T^k\omega)=m(E)$$

（$\chi_E$ ハ $E$ ノ特性函數）ト言ッテモ同値デアル。

之レニ對シテ次ノ定理ガ証明サレル。

$\boxed{\text{定理 I}}$ 『エルゴード的保測変換 $T$ ガ廣義混合型デアルタメノ必要十分條件ハスベテノ $f(\omega)\in L_1(\Omega)$ 及ビ $\lambda\neq 0$ (mod. $2\pi$) ニ對シテ殆ンド到ル所

(5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} f(T^k\omega)=0$$

トナルコトデアル。(5)ノ代リニスベテノ $E\in B$ ニ對シテ殆ンドスベテノ $\omega$ ニ對シテ

(6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} \chi_E(T^k\omega)=0$$

ト言ッテモ同値デアル。』

E. Hopf ハ又 $T$ ガ廣義混合型トナルタメノ條件ヲ積空間ニ於ケル積変換ノ性質ニヨッテ與ヘタ。ソレト關聯シテ，今別ニ今一ツノ測度空間 $(\Omega', B', m')$ $(m'(\Omega')=1)$ ト，ソノ上ノ保測変換 $T'$ トガ與ヘラレテヰルトキニ，積空間

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \bar{\Omega} \ni \bar{\omega} = (\omega, \omega'),$$
$$\omega \in \Omega, \ \omega' \in \Omega'$$

ノ上デ $E \times E' = \{(\omega, \omega'); \omega \in E, \omega' \in E'\}$, $E \in B$, $E' \in B'$ ヲ含ム最小ノ Borel 集合体ヲ $\bar{B}$, 其処デノ積測度ヲ $\bar{m}$: $\bar{m}(E \times E') = m(E) \times m(E')$ トスレバ,

$$(7) \quad \bar{T}\bar{\omega} = (T\omega, T\omega')$$

ナル $\bar{\Omega}$ 上ノ変換ヘ又一ツノ保測変換トナル。E. Hopf ハ T ガ広義混合型デアルタメノ必要十分條件ハ $(\Omega', B', m') = (\Omega, B, m)$, $T' = T$ ノトキ, $\bar{T}$ ガエルゴード的デアルコトヲ証明シタ。コレト関聯シテ次ノ定理ガ証明サレル。

$\boxed{\text{定理 II}}$ 「T ガ広義混合型ナルタメノ必要十分條件ハ, 任意ノ測度空間 $(\Omega', B', m')$ 及ビ任意ノソノ上ノエルゴード的保測変換 $T'$ ニ對シテ (7) ノ $\bar{T}$ ガ又エルゴード的ニナルコトデアル。」

コノ定理ノ意味ハ統計系列ノ理論ト結ビツケルコトニヨリ、ハッキリスル様ニ思ハレルガ此処デハ省略スル。

次ニ或ル意味デノ逆ノ問題ヲ考ヘテミル。今上ニ与ヘタ $(\bar{\Omega}, \bar{B})$ 上ニ測度 $\bar{\mu}$ ガ定義サレテ

$$(8) \quad \bar{\mu}(E \times \Omega') = m(E), \ \bar{\mu}(\Omega \times E') = m'(E'),$$
$$\bar{\mu}(\bar{E}) = \bar{\mu}(\bar{T}\bar{E})$$

ヲ満足シ, 且ツ $\bar{T}$ ガ $(\bar{\Omega}, \bar{B}, \bar{\mu})$ 上エルゴード的デアルトスルト

$\boxed{定理 \mathrm{III}}$ 『今Tヲ廣義混合型，T'ヲエルゴード的トスレバ，$\bar{\mu}=\bar{m}$カ、然ラザレバ$\bar{\mu}$ハ$\bar{m}$ニ對シテ特異(singulär)デアル』

即チ$(\bar{\Omega}, \bar{B}, \bar{\mu})$中$m$ト$m'$トハ互ニ獨立デアルカ、又ハ甚ダ緊密ニ関係シテオナケレバナラナイ。

## §2

定理IIカラ定理I, IIIヲ導クコトハ容易デアル。

定理Iノ證。今Tガ廣義混合型デナケレバ，(2)ノ$\phi$ヲトリ，$\lambda=-\lambda_0$トスレバ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda}\phi(T^k\omega)=\phi(\omega) \quad f.ü$$

トナリ，(5)ガ成立シナイ。

今度ハTヲ広義混合型トスレバ，$\Omega'$ヲ実數全体ノ加法群ヲmod. $2\pi$デ考ヘタ空間，$B'$ヲソノBorel集合全体，$m'$ヲLebesgue測度，$T'\omega'=\omega'+\lambda$トスル。

(i) $\lambda$=無理数ナラバ$T'$ハエルゴード的保測変換トナルカラ，定理IIニヨッテ$\bar{\Omega}=\Omega\times\Omega'$上ノ$\bar{T}=T\times T'$ハ又エルゴード的トナル。故ニ$F(\bar{\omega})=e^{i\omega'}f(\omega)$トオケバ

$$F(\bar{T}\bar{\omega})=e^{i(\omega+\lambda)}f(T\omega)$$

トナルカラ，(3)ニヨッテ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F(\overline{T}^k\overline{\omega})$$

$$=e^{i\omega'}\times\lim\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\lambda}f(T^k\omega)=\int_{\overline{\Omega}}\overline{F}(\overline{\omega})\overline{m}(d\overline{\omega})$$

$$=\int_{\Omega}f(\omega)m(d\omega)\times\int_{\Omega'}e^{i\omega'}m(d\omega')=0\qquad f.ü$$

即チ (5) ガ成立スル。

(iii) $\lambda=\frac{s}{r}$, $(r,s)=1$ ノトキハ、T ガ廣義混合型ナル故, $T^r$ ハエルゴード的デアル。故ニ $n=mr+t$, $0\leqq t<r$ トスレバ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\lambda}f(T^k\omega)$$

$$=\frac{1}{r}\Bigg[\lim_{n\to\infty}\frac{r(m+1)}{n}\times\Bigg\{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}f(T^{rk}\omega)$$

$$+\cdots+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}e^{it\frac{s}{r}}\sum_{k=0}^{m}f(T^{rk}T^{t}\omega)\Bigg\}$$

$$+\lim\frac{rm}{n}\times\Bigg\{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}e^{i(t+1)\frac{s}{r}}\sum_{k=0}^{m-1}f(T^{rk}T^{t+1}\omega)$$

$$+\cdots+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f(T^{rk}T^{r-1}\tfrac{s}{r}\omega)\Bigg\}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\int_{\Omega}f(T^k\omega)m(d\omega)\ e^{i\frac{ks}{r}}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}e^{i\frac{ks}{r}}\times\int_{\Omega}f(\omega)m(d\omega)=0\qquad q.e.d.$$

定理III ノ証. (8)式ノ測度 $\bar\mu$ ヲ

$$\bar\mu = \bar\mu_1 + \bar\mu_2$$

ト $\bar m$ ニ関シテ絶対連続ナ $\bar\mu_1$ ト，特異ナ $\bar\mu_2$ トニ分ケル。

$\bar\mu_1^0(E)=\bar\mu_1(TE)$，$\bar\mu_2^0(E)=\bar\mu_2(TE)$ ハ夫々 $\bar m$ ニ関シテ絶対連続及特異トナルカラ

$$\bar m(E)=\bar m(TE)=\bar\mu_1(TE)+\bar\mu_2(TE)$$
$$=\bar\mu_1^0(E)+\bar\mu_2^0(E)$$

カラ $\bar\mu_1(E)=\bar\mu_1^0(E)=\bar\mu_1(TE)$，$\bar\mu_2(E)=\bar\mu_2^0(E)=\bar\mu_2(TE)$ ヲ得ル。

シカルニ $\bar m$ ハ定理IIカラエルゴード的トナル故，ソレニ関シテ絶対連続且不変ナ $\bar\mu_1$ ハ

$$\bar\mu_1(E)=\alpha\bar m(E),\quad 0\le\alpha\le 1$$

デナケレバナラヌ。一方 $\bar\mu_2$ ハ $\bar m$ ニ特異且 $\bar T$ ニ不変ナル故アル $\bar m(\bar E)=0$ ナル $\bar E\in\bar B$ ヲトレバ

$$\bar\mu_2(\bar E)=\bar\mu_2(\bar\Omega),\quad \bar\mu_2(\bar\Omega-\bar E)=0,\quad \bar T\bar E=\bar E$$

ナラシメルコトガ出来ル。故ニ

$$\bar\mu(\bar E)=\bar\mu_2(\bar\Omega),\quad \bar\mu(\bar\Omega-\bar E)=\bar\mu_1(\bar\Omega),\quad \bar T\bar E=\bar E$$

ヨリ，$\bar\mu$ ニ関シテ $\bar T$ ガエルゴード的デアルカラ $\bar\mu=0$ 又ハ $\bar\mu_2=0$ デナケレバナラナイ。 q.e.d.

## § 3

定理II ノ証明. 今 T ガ廣義混合型デナケレバ (2) ノ

$\phi$ ヲトル。又 $(\Omega', \mathcal{B}', m') = (\Omega, \mathcal{B}, m)$, $T = T'$ トシテ

$$F(\bar{\omega}) = \frac{\phi(\omega)}{\phi(\omega')}$$

トスレバ，$F(\bar{\omega}) \neq Konst.$ デ，且ツ

$$F(\bar{T}\bar{\omega}) = \frac{\phi(T\omega)}{\phi(T'\omega')} = \frac{\phi(\omega)}{\phi(\omega')} = F(\bar{\omega})$$

トナル。故ニ $\bar{T}$ ハエルゴード的デナイ。

今度ハ $T$ ヲ廣義混合型トスル。コノ場合ニ $\bar{T}$ ガエルゴード的デナイトシテ矛盾ニ導ク。

$\bar{T}$ ガエルゴード的デナイトシタノデアルカラ $\bar{\mathcal{B}} \ni \bar{E}$, $\bar{m}(\bar{E}) = c$, $c \neq 1$, $c \neq 0$ 且ツ

(9) $\bar{m}(\bar{T}\bar{E} \ominus \bar{E}) = 0$

トル $\bar{E}$ ガ存在スル。Fubini ノ定理カラ

(10) $(\bar{E})_{\omega'} = \{\omega; (\omega, \omega') \in \bar{E}\}$

トスレバ，殆ンドスベテノ $\omega'$ ニ對シテ $(\bar{E})_{\omega'} \in \mathcal{B}$ デ

(11) $\bar{m}(\bar{E}) = c = \int_{\Omega'} m((\bar{E})_{\omega'})\, m'(d\omega')$

トナル。コノトキ

(12) $m((\bar{E})_{\omega'}) = c \qquad f.\ddot{u}$

トナル。何トナレバ，ソウデナイトスレバアル $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$A' = \{\omega'; m((\bar{E})_{\omega'}) \geqq c + \varepsilon\}, \ m'(A') > 0$$

$$B' = \{\omega' ;\ m((E)_{\omega'}) \leqq c - \varepsilon\},\quad m'(B') > 0$$

トナル。假定ニヨリ $T'$ ハエルゴード的デアルカラ，アル $n$ ニ對シテ

$$m'(T'^{n} A' \frown B') > 0$$

トナル。故ニ (11) カラ

$$\bar{m}(\bar{T}^{n}\bar{E} \frown \bar{E}) \geqq \int_{\Omega'} \left| m((E)_{\omega'}) - m((\bar{T}^{n}\bar{E})_{\omega'}) \right| m'(d\omega')$$

$$\geqq 2\varepsilon \cdot m'(T'^{n} A' \frown B') > 0$$

トナリ (9) ニ矛盾スル。

次ニ $\bar{B}$ ノ定義カラ任意ニ與ヘラレタ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$E_i \in B,\ E_i' \in B',\ E_i' \frown E_j' = 0\ (i \neq j),$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i' = \Omega'.\quad \bar{E}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \times E_i'$$

(13) $\quad \bar{m}(\bar{E} \ominus \bar{E}_\varepsilon) < \varepsilon$

ナルヤウニ $E_i, E_i'$ ヲエラブコトガ出來ル。コノトキ

$$\varepsilon > \bar{m}(\bar{E} \ominus \bar{E}_\varepsilon) = \int_{\Omega'} m((\bar{E} \ominus \bar{E}_\varepsilon)_{\omega'})\, m'(d\omega')$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{k} |m(E_i) - c|\, m'(E_i')$$

デアルカラ，$d > 0$ ニ對シテ

(14) $$\sum_{m(E_i) > c+d} m'(E_i') \leqq \frac{2\varepsilon}{d}$$

トナル。

サテTが廣義混合型デアルトイフ假定カラ $\varepsilon>0$ ニ對シテアル十分大ナルNヲトレバ

$$(15)\quad |m(T^N E_i \cap E_j) - m(E_i)\times m(E_j)| < \varepsilon, \quad i,j=1,\cdots,n$$

ナラシメルコトが出来ル。(9) ト (13) トカラ

$$(16)\quad \bar{m}(\bar{T}^N \bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{E}_\varepsilon)$$

$$\leqq \bar{m}(\bar{T}^N \bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{T}^N \bar{E}) + \bar{m}(\bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{E}) < 2\varepsilon$$

トナル。一方

$$E'_{ij} = T'^N E'_i \cap E'_j, \qquad i,j=1,\cdots\cdots,n$$

トスレバ

$$(17)\quad \begin{cases} E'_{ij} \cap E'_{kl} = 0, & i \neq k \text{ 又ハ } j \neq l \\ E'_j = \bigcup_{i=1}^n E'_{ij}, & \bar{T}^N E'_i = \bigcup_{j=1}^n E'_{ij} \end{cases}$$

ヲ満足スル。

今 $m'(E'_{ij}) = \alpha_{ij} \geqq 0$ トオケバ

$$(18)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = m'(E'_j), \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = m'(T'^N E'_i) = m'(E'_i), \\ \sum_{ij=1}^n \alpha_{ij} = 1 \end{cases}$$

トナル。(15) カラ

$$m(T^N E_i \ominus E_j) = m(E_i) + m(E_j) - 2m(T^N E_i \cap E_j)$$

$$\geqq m(E_i) + m(E_j) - 2m(E_i)m(E_j) - \varepsilon$$

デアルカラ

$$\bar{m}(\bar{T}^N \bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{E}_\varepsilon) = \bar{m}\left(\bigcup_{i,j=1}^{n}((T^N E_i \ominus E_j)\times E'_{ij})\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} m(T^N E_i \ominus E_j)\, m'(E'_{ij})$$

$$\geqq \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ m(E_i) + m(E_j) - 2m(E_i)\, m(E_j) - \varepsilon \right\} \alpha_{ij}$$

$$\underset{(18)}{=} \sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, m'(E'_i) + \sum_{j=1}^{n} m(E_j)\, m'(E'_j)$$

$$-2\sum_{ij=1}^{m} m(E_i)\, m(E_j)\, \alpha_{ij} - 2\varepsilon$$

$$= 2\left\{ \sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, m'(E'_i) - \sum_{ij=1}^{n} m(E_i)\, m(E_j)\, \alpha_{ij} - \varepsilon \right\}^{*)}$$

シカルニ Schwarz ノ不等式カラ

$$\sum_{ij=1}^{n} m(E_i)\, m(E_j)\, \alpha_{ij} \leqq \left\{ \left(\sum_{ij=1}^{n} m(E_i)^2 \alpha_{ij}\right)\left(\sum_{ij=1}^{n} m(E_j)^2 \alpha_{ij}\right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m(E_i^2)\, m'(E'_i) \leqq \sum_{m(E_i) > c+d} m(E_i)\, m(E'_i)$$

$$+ (c+d) \sum_{m(E_i) \leqq c+d} m(E_i)\, m(E'_i)$$

$$\underset{(14)}{\leqq} (c+d) \sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, m(E'_i) + (1-c-d)\frac{2\varepsilon}{d}$$

トナル。

今 $d = \frac{1}{2}(1-c)$ トオイテ *) ニ代入スレバ

$$*) \geqq 2\left\{ d\sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, m'(E'_i) - 2\varepsilon - \varepsilon \right\}$$

故ニ (16) ト合セテ (且ツ (13) カラ $\bar{m}(\bar{E}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, m'(E'_i)$

$\geqq c - \varepsilon$ ナル故)

$$2\varepsilon \geqq 2\left\{ \frac{1-c}{2}(c-\varepsilon) - 3\varepsilon \right\} \geqq c(1-c) - 7\varepsilon$$

即 $9\varepsilon \geqq c(1-c)$

トナル。コレハ $c \neq 0$, $c \neq 1$, $\varepsilon \to 0$ トスレバ矛盾デアル。

q. e. d.

(6. 21)